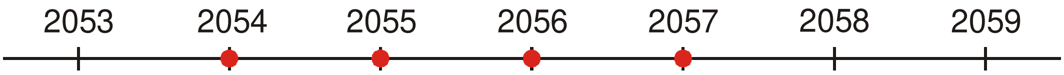
3.5.19 Intervaly I

Předpoklady: 030518

Př. 1: Zapiš výčtem a znázorni na číselné ose množiny.
a) $A = \{x \in N; 2054 \leq x < 2058\}$ b) $B = \{x \in Z; -1 < |x| \leq 1\}$

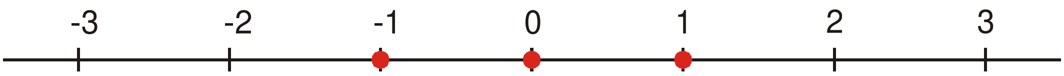
a) $A = \{x \in N; 2054 \leq x < 2058\}$

$A = \{2054; 2055; 2056; 2057\}$



b) $B = \{x \in Z; -1 < |x| \leq 1\}$

$B = \{-1; 0; 1\}$



Pedagogická poznámka: Problém s bodem b) spočívá v tom, že žáci neporovnávají $|x|$, ale pouze x. Proto do množiny nezahrnují číslo -1. Je to krásně vidět, když se jich zeptáte, proč do množiny nepatří číslo -1 ("Není větší než -1"). Ptám se: "Ona je v zadání nějaká podmínka pro číslo x?"
Zajímavé je, kolik z nich tuto chybu zopakuje v příkladu 3 a to i v případě, že si u chyby dělali poznámku.

Př. 2: Během první minuty zahřívání vody se teplota zvýšila z $10,5°C$ na $15,3°C$. Zapiš všechny hodnoty teploty, kterých voda během první minuty dosáhla.

Úkol je zjevně nesplnitelný: museli bychom zapsat čísla 10,5 a 15,3 a všechna čísla mezi nimi (teplota vody se mění postupně), kterých je nekonečně mnoho (10,51; 10,501; 10,5001; 10,50001 ….).

Úkol podobný předchozímu příkladu (zapsat všechna čísla větší nebo rovná jednomu číslu a menší nebo rovná druhému číslu – lidově odněkud někam) se v matematice řeší často $\Rightarrow$ existuje způsob jak tuto množinu (**uzavřený interval**) zapsat.
Co musí takový zápis obsahovat?
Obě hraniční čísla a naznačení, že k nim patří i všechna reálná čísla mezi nimi:
Zápis: $\langle 10,5; 15,3 \rangle$:

- $\langle \ \rangle$ - všechna reálná čísla,
- 10,5 – větší nebo rovna 10,5,
- 15,3 – menší nebo rovna 15,3

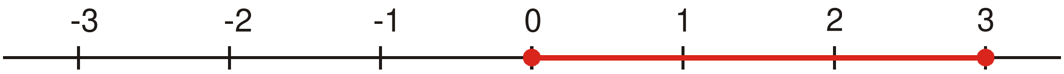
Uzavřený interval $\langle a; b \rangle$

Množinu $A = \langle a; b \rangle$ všech reálných čísel větších nebo rovných číslu a a zároveň menších nebo rovných číslu b označujeme jako uzavřený interval $A = \langle a; b \rangle = \{x \in R; a \le x \le b\}$.

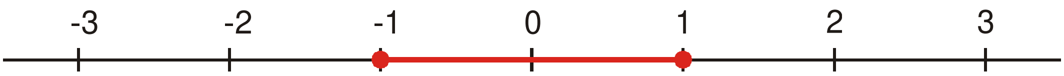
Pedagogická poznámka: Někteří žáci se už v tomto okamžiku ptají, jak by to bylo, kdyby krajní body do množiny nepatřily. Chválím je za postřeh, ale v tuto chvíli to neřešíme (už vůbec ne před třídou).

Př. 3: Zapiš výčtem a znázorni na číselné ose množiny.
a) $A = \{x \in R; 0 \le x \le 3\}$ b) $B = \{x \in R; -3 \le |x| \le 1\}$ c) $C = \{x \in Z; |x| \le 2\}$

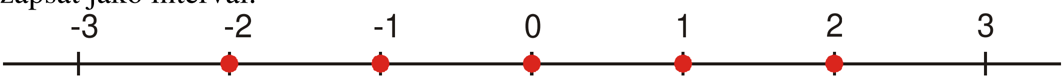
a) $A = \{x \in R; 0 \le x \le 3\} = \langle 0; 3 \rangle$



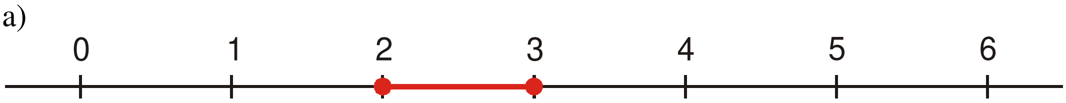
b) $B = \{x \in R; -3 \le |x| \le 1\} = \langle -1; 1 \rangle$



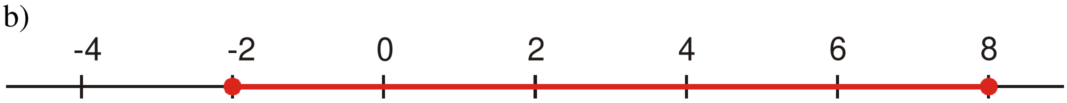
c) $C = \{x \in Z; |x| \le 2\} = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ - uvažujeme pouze celá čísla $\Rightarrow$ nemůžeme výsledek zapsat jako interval.



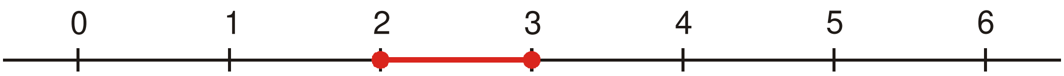
Př. 4: Zapiš výčtem i vlastností pomocí nerovností množiny zakreslené na číselné ose.
a)



b)

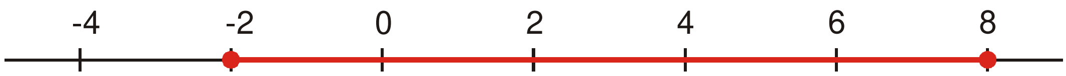


a)



$A = \langle 2; 3 \rangle = \{x \in R; 2 \le x \le 3\}$

b)



$A = \langle -2; 8 \rangle = \{x \in R; -2 \le x \le 8\}$

Pedagogická poznámka: Ve zbytku hodiny se rychlejší část třídy zabývá průniky a sjednoceními. Termíny ale nepoužíváme, pracujeme spíše intuitivně.

Př. 5: Jdeš do obchodu. Táta Ti připomíná: „Kup máslo a houbičky na nádobí“. Rozhodni, zda bude táta s nákupem spokojený, jestliže přineseš:
a) máslo, ale bez houbiček, b) houbičky i máslo,
c) houbičky bez másla, d) spoustu věcí ale bez másla i houbiček.

Táta bude spokojený pouze v případě popsaném v bodu b), protože chtěl přinést obě věci: máslo i houbičky na nádobí.

Př. 6: Rodiče odchází navečer do divadla. U dveří mamka připomíná: „Nezapomeň umýt nádobí nebo vyluxovat.“ V jakém případě bude mamka po návratu spokojená? Za jakých okolností bude naopak naštvaná?

Naštvaná bude, pokud po návratu nebude umyté nádobí a nebude vyluxováno (neudělám ani jednu z věcí).
Spokojená bude, pokud bude:
- umyté nádobí a nevyluxovaný pokoj,
- neumyté nádobí a vyluxovaný pokoj,
- umyté nádobí a vyluxovaný pokoj.

Stačí, když udělám jednu věc, abych splnil zadaný úkol.

Pedagogická poznámka: U obou následujících příkladů používám v případě obtíží jako poslední záchranu následující model: Máš za úkol napsat na papírek číslo, které je větší než 3 a menší než 5, a zároveň je větší než 2 a menší než sedm. Bude v pořádku, když na papír napíšeš číslo 3? 4? 6? …

Př. 7: Pro číslo x platí $x \in \langle 3;5 \rangle$ a zároveň $x \in \langle 2;7 \rangle$. Napiš množinu všech čísel, která mohou být číslem x.

$x \in \langle 3;5 \rangle$ a zároveň $x \in \langle 2;7 \rangle$ $\Rightarrow$ musí vyhovovat oběma podmínkám. Rozebereme si je postupně.
Dolní hranice (čísla, kterým se x rovná, nebo která jsou menší):
- $x \in \langle 3;5 \rangle \Rightarrow x \geq 3$,
- $x \in \langle 2;7 \rangle \Rightarrow x \geq 2$,

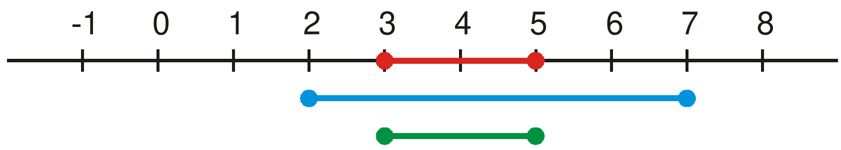
$\Rightarrow$ pokud má platit obojí, musí platit $x \geq 3$ (pak je automaticky větší i než 2).

Horní hranice (čísla, kterým se x rovná, nebo která jsou větší):
- $x \in \langle 3;5 \rangle \Rightarrow x \leq 5$,
- $x \in \langle 2;7 \rangle \Rightarrow x \leq 7$,

$\Rightarrow$ pokud má platit obojí, musí platit $x \leq 5$ (pak je automaticky menší i než 7).

Pro hledaná x platí: $x \geq 3$ a $x \leq 5$ $\Rightarrow$ $x \in \langle 3;5 \rangle = A$

Příklad můžeme snadno vyřešit obrázkem. Nakreslíme si oba intervaly a hledáme čísla, která patří do obou.



Číslem x může být libovolné číslo z intervalu $\langle 3;5\rangle$.

Př. 8: Pro číslo y platí $y \in \langle 3;8\rangle$ nebo $y \in \langle -1;6\rangle$. Napiš množinu všech čísel, která mohou být číslem y.

$y \in \langle 3;8\rangle$ nebo $y \in \langle -1;6\rangle$ $\Rightarrow$ musí vyhovovat alespoň jedné podmínce. Rozebereme si je postupně.
Dolní hranice (čísla, kterým se y rovná, nebo která jsou menší):

- $y \in \langle 3;8\rangle \Rightarrow y \geq 3$,
- $y \in \langle -1;6\rangle \Rightarrow y \geq -1$,

$\Rightarrow$ pokud stačí, když platí jedna z podmínek, stačí podmínka $y \geq -1$ (na druhé nezáleží, stačí, když je splněna jedna z nich).

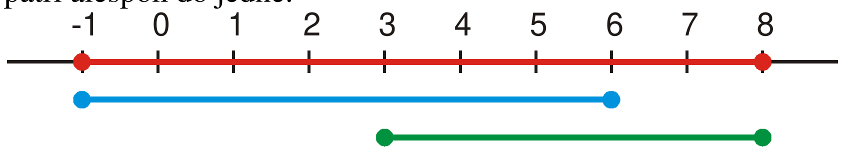
Horní hranice (čísla, kterým se y rovná, nebo která jsou větší):

- $y \in \langle 3;8\rangle \Rightarrow y \leq 8$,
- $y \in \langle -1;6\rangle \Rightarrow y \leq 6$,

$\Rightarrow$ pokud stačí, když platí jedna z podmínek, stačí podmínka $y \leq 8$ (na druhé nezáleží, stačí, když je splněna jedna z nich).

Pro hledaná y platí: $y \geq -1$ a $y \leq 8$ $\Rightarrow$ $y \in \langle -1;8\rangle$

Příklad můžeme snadno vyřešit obrázkem. Nakreslíme si oba intervaly a hledáme čísla, která patří alespoň do jedné.



Číslem x může být libovolné číslo z intervalu $\langle -1;8\rangle$.

Shrnutí: Všechna reálná čísla větší nebo rovna číslu a a zároveň menší nebo rovna číslu b můžeme zapsat uzavřeným intervalem $\langle a;b\rangle$.